CHAPITRE 4

TRIGONOMETRIE

1 Mesure des angles orientés

Rappel

On obtient des secteurs avec des intersections, des réunions de demi-plans, ou une demi-droite, ou le plan.

Exercices

1 *Définir un secteur saillant, rentrant, plat, nul, tour.*
Notation: $s = [ABC] = [CBA]$.

2 ***Théorème.*** *Dans l'ensemble* S *des secteurs, si l'on dit que deux secteurs sont équivalents si et seulement si il existe une isométrie qui transforme l'un en l'autre , alors on a une relation d'équivalence dans* S .

Définition 1 Un **angle** (non orienté) est une classe d'équivalence de secteurs relativement à l'isométrie. L'ensemble des angles non orientés est noté A.

Définition 2 On appelle **secteur orienté** un couple ([ABC], [B,A)) où [ABC] est un secteur et [B,A) une des frontières du secteur appelée "première frontière".

Exercices

3 *Qu'est-ce qu'un secteur orienté nul, plat, tour, droit?*
Dans quel cas a-t-on ([ABC], [B,A)) = ([ABC], [B,C)) ? *Démontrer qu'avec un secteur non orienté plat, on peut construire deux secteurs orientés plats.*

4 *Rappel. Une translation est le composé de deux symétries d'axes parallèles et une rotation le composé de deux symétries d'axes sécants ou confondus.*

*On pose que deux secteurs orientés non nuls, non tour, ont même **orientation** lorsqu'il existe une translation suivie d'une rotation transformant la première frontière de l'un dans la première frontière de l'autre de telle sorte que l'image de l'un des secteurs non orientés est incluse dans l'autre ou que l'un est inclus dans l'image de l'autre.*

Démontrer que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des secteurs orientés non nuls, non tour. On a alors deux classes O_1 *et* O_2 *appelées **orientations** du plan. L'une d'elle se nomme orientation directe ou positive et l'autre orientation rétrograde.*
Pourquoi faut-il exclure les secteurs orientés nuls ou tour?

THEOREME 1 Si l'on pose ([ABC], [B,A)) $\mathcal{R}$ ([A'B'C'], [B',A')) si et seulement si les deux secteurs ont même orientation et [ABC] et [A'B'C'] sont isométriques, alors on a une relation d'équivalence dans l'ensemble des secteurs non nuls, non tour.

Définition 3 On appelle **angle orienté** l'un des ensembles suivants

a) une classe d'équivalence de secteurs orientés relativement à la relation $\mathcal{R}$ du théorème précédent

b) l'ensemble des secteurs orientés nuls et tour noté $\measuredangle\,\omega$ et appelé angle nul.

<u>Notation</u>

$\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \measuredangle\alpha$, [B,A) étant la première frontière du secteur orienté ([ABC], [B,A)).
$\mathscr{A}$ pour l'ensemble des angles orientés.

$\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = \measuredangle\omega$ l'angle nul (orienté).

THEOREME 2 Les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies dans l'ensemble des nombres réels par $x\,\mathcal{R}_1\,y \Leftrightarrow x = y + k360$ et $k \in \mathbf{Z}$ (modulo 360) et $x\,\mathcal{R}_2\,y \Leftrightarrow x = y + k2\pi$ et $k \in \mathbf{Z}$ (modulo 2π) sont des relations d'équivalence.

Notation

$\dot{x} = \{y \in \mathbf{R} \mid y = x + k2\pi \text{ et } k \in \mathbf{Z}\}$ la classe d'équivalence du nombre x (modulo 2π).

$\dot{0} = \{0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, ..., -2\pi, ...\} = \dot{-2\pi} = \dot{4\pi}$

$\mathbb{R} / 2\pi$ est l'ensemble des classes modulo 2π, et $\mathbf{R} / 360$ l'ensemble des classes modulo 360.

Exercices

5 *Qu'est-ce que* $\dot{\pi}$, $\dot{\frac{\pi}{2}}$? *A-t-on* $-\pi \in \dot{\pi}$, $-\frac{3}{2}\pi \in \dot{\frac{\pi}{2}}$, $\dot{270} \in \mathbf{R} / 360$, $120 \in \mathbf{R} / 360$, $\frac{3\pi}{2} \in \mathbf{R} / 2\pi$, $\dot{2\pi} \in \mathbf{R} / 2\pi$? *A quelles classes appartiennent* $\frac{147\pi}{2}$, $\frac{371\pi}{4}$, $-\frac{172\pi}{3}$?

6 *Si l'on pose* $\dot{x} + \dot{y} = \dot{(x+y)}$, *démontrer que* $(\mathbf{R} / 2\pi, +)$ *est un groupe commutatif.*

Rappel

On dispose déjà de la mesure des angles (mode d'emploi du rapporteur) avec, pour A l'ensemble des angles non orientés, l'application $\mu_{\text{degré}} : A \to [0, 360]$

$$\measuredangle\alpha \mapsto \mu_{\text{degré}}(\measuredangle\alpha) = x$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\mu_{\text{degré}}(\measuredangle\alpha) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle\alpha = \measuredangle\omega$ (l'angle nul non orienté)

2 $\mu_{\text{degré}}(\measuredangle p) = 180$ pour $\measuredangle p$ l'angle plat

3 $\mu_{\text{degré}}(\measuredangle AOB) = \mu_{\text{degré}}(\measuredangle AOC) + \mu_{\text{degré}}(\measuredangle COB) \Leftrightarrow$ [AOC] et [COB] sont adjacents

4 $\mu_{\text{degré}}$ est surjective.

Exercice 7

Montrer qu'avec $\mu_{\text{radian}}(\measuredangle\alpha) = \frac{\pi}{180}\mu_{\text{degré}}(\measuredangle\alpha)$, *on a aussi ces quatre propriétés sur* $[0; 2\pi]$ *et que* $\mu_{\text{degré}}$ *et* μ_{radian} *sont des bijections.*

On admettra l'axiome suivant pour la mesure des angles orientés.

AXIOME

La mesure en radians des angles orientés est une application

$$\mathbf{m_{radian}} \;:\; \mathscr{A} \;\to\; \mathbb{R}/2\pi$$

$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \;\mapsto\; \dot{x} = \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\quad \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle\,\omega) = \dot{0}$

2 $\quad \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \dot{x}$ **si** $x = \mu_{rad}(\measuredangle\, AOB)$ **et** $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ **est d'orientation directe**

3 $\quad \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})) + \mathbf{m_{rad}}(\measuredangle(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}))$ (Chasles)

<u>Remarque</u>

On peut illustrer les notions précédentes de la manière suivante.

Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère l'axe $(I, \overrightarrow{OJ})$ tangent au cercle $\mathcal{C}_{(O,1)}$.
Si l'on "enroule" sur le cercle le demi-axe positif dans le sens direct et le demi-axe négatif dans le sens rétrograde, on constate que tous les points de l'axe dont les abscisses diffèrent de 2π (mesure du périmètre du cercle) se superposent sur le même point M du cercle. On obtient ainsi une surjection de l'ensemble des points de l'axe sur l'ensemble des points de cercle ou une bijection de l'ensemble des classes de réels modulo 2π vers l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}_{(O,1)}$.

On peut poser $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$.

Exercices

8 *Construire une application* $m_{degré} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}/360$, *et vérifier que l'on a aussi les trois propriétés ci-dessus pour la mesure en degrés.*

9 *Si l'on note* $\mathscr{A}_+$ *l'ensemble des angles orientés positivement auquel on a ajouté l'angle nul, démontrer que* $m_{rad} : \mathscr{A}_+ \to \mathbb{R}/2\pi$ *est une bijection.*

10 *Si* $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *est d'orientation directe, démontrer que*

$m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})) = -m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))$.

11 *Si* $A \prec B \prec C$, *calculer* $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}))$ *et* $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}))$. *En déduire que l'angle orienté plat d'orientation directe a la même mesure que l'angle orienté plat d'orientation rétrograde.*

12 *Si* $(OA) \perp (OB)$, $[AOB]$ *saillant et* $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *d'orientation directe, alors*

$$m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \dot{\frac{\pi}{2}} \quad et \quad m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})) = \dot{\frac{3\pi}{2}} = \dot{-\frac{\pi}{2}} .$$

13 *Si* $(OA) \perp (OB)$, $[AOB]$ *saillant,* $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *d'orientation directe et* $\delta(O,A) = \delta(O,B) = 1$ *avec* $\mathcal{S}_d(A) = B$ *et* $M \in \mathcal{C}_{(O,1)} \cap d \cap [AOB]$, *démontrer que* $O \in d$ *et* $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \measuredangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$ *et* $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})) = \dot{\frac{\pi}{4}}$.

2 Fonctions trigonométriques sinus et cosinus

2.1 Construction et définition de sinus et de cosinus dans un repère orthonormé direct

Un **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan est dit **orthonormé direct** si $(OI) \perp (OJ)$, $\delta(O,I) = \delta(O,J) = 1$ et $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est d'orientation directe. On dit aussi que le repère est orienté positivement.

On rappelle que l'application "mesure des angles orientés" est une bijection de l'ensemble des angles orientés positivement, auquel on adjoint l'angle orienté nul, vers l'ensemble des classes (modulo 2π) $\mathbb{R}/2\pi$.

Construction

A chaque nombre $x \in \mathbb{R}$, on associe une et une seule classe $\dot{x}$. A chaque classe $\dot{x}$, on associe un et un seul angle orienté positivement $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. La demi-droite $[O,M)$ coupe le cercle $\mathcal{C}_{(O,1)}$ en un et un seul point M. Ce point a un et un seul projeté orthogonal M' sur l'axe (OI) et un et un seul projeté orthogonal M'' sur (OJ).

cos x est le nombre $\overline{OM'}$, c'est-à-dire l'abscisse du point M

sin x est le nombre $\overline{OM''}$, c'est-à-dire l'ordonnée du point M.

On peut résumer le composé de ces applications à l'aide des diagrammes suivants.

$$\begin{array}{ccccc}
x & \mapsto & \dot{x} & \mapsto & m^{-1}_{rad}(\dot{x}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \\
\downarrow (\text{cosinus}) & & & & \downarrow \ ([O,M) \cap \mathcal{C}_{(O,1)}) \\
\overline{OM'} = \cos x & \leftarrow\!\shortmid & M' \in (OI) & \leftarrow\!\shortmid & M
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
x & \mapsto & \dot{x} & \mapsto & m^{-1}_{rad}(\dot{x}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \\
\downarrow (\text{sinus}) & & & & \downarrow \ ([O,M) \cap \mathcal{C}_{(O,1)}) \\
\overline{OM''} = \sin x & \leftarrow\!\shortmid & M'' \in (OJ) & \leftarrow\!\shortmid & M
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{llll}
\textbf{sin}: & \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\
 & x & \mapsto & \overline{OM''}
\end{array} \quad \text{et } \sin x = \overline{OM''} \text{ avec } M \in \mathcal{C}_{(O,1)} \text{ et } M'' = p_{\perp}(M) \in (OJ)$$

$$\text{et } \dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$$

$$\begin{array}{llll}
\textbf{cos}: & \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\
 & x & \mapsto & \overline{OM'}
\end{array} \quad \text{et } \cos x = \overline{OM'} \text{ avec } M \in \mathcal{C}_{(O,1)} \text{ et } M' = p_{\perp}(M) \in (OI)$$

$$\text{et } \dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$$

2.2 Propriétés

1 $\quad$ $\sin(x+2\pi) = \sin x$ $\quad$ et $\quad$ $\cos(x+2\pi) = \cos x$

En effet, $x + 2\pi \in \dot{x}$ (modulo 2π) et $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$.

On dit que sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

On a aussi $\sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + k\cdot 2\pi) = \cos x$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Plus généralement, une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est **périodique de période $p \in \mathbb{R}_+^*$** si

1. $\forall x \in Df \quad x + p \in Df$
2. $f(x + p) = f(x)$

Remarque

Si une fonction est périodique de période p, elle est périodique de période $k \cdot p$ $(k \in \mathbb{Z}^*)$.

2 **$\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$**

En effet, avec $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI})$ et $M = I$ on a $\sin 0 = \overline{OM''} = \overline{OO} = 0$ et $\cos 0 = \overline{OM'} = \overline{OM} = \overline{OI} = 1$.

3 **$\sin \pi = 0$ et $\cos \pi = -1$**

En effet, avec $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, -\overrightarrow{OI})$ on a $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OI}$ et $M(-1; 0)$.
Ainsi, $p_\perp(M) = M'' = O \in (OJ)$ et $\sin \pi = \overline{OM''} = \overline{OO} = 0$ et $\cos \pi = \overline{OM'} = \overline{OM} = -1$.

4 **$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$**

Avec $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a $M = J$ et $p_\perp(M) = M' = O \in (OI)$.
Ainsi, $\sin \frac{\pi}{2} = \overline{OM''} = \overline{OM} = \overline{OJ} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = \overline{OM'} = \overline{OO} = 0$.

5 **$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ et $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$**

Avec $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \measuredangle(\overrightarrow{OI}, -\overrightarrow{OJ})$ on a $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OJ}$ et $M(0; -1)$ et $M' = O$ et $M'' = M$.
Ainsi, $\sin \frac{3\pi}{2} = \overline{OM''} = \overline{OM} = -1$ et $\cos \frac{3\pi}{2} = \overline{OM'} = \overline{OO} = 0$.

6 **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$**

En effet, avec $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ la propriété est immédiate avec les quatre propriétés précédentes. Avec $x \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, le triangle $\Delta OMM'$ est un triangle rectangle et, avec le théorème de Pythagore, on a $\delta(O,M)^2 = \delta(O,M')^2 + \delta(M',M)^2$

$$= \delta(O,M')^2 + \delta(O,M'')^2 \text{ car OM'MM'' rectangle}$$

$$\text{et} \quad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \, .$$

Exercices

14 *Avec un repère orthonormé directe* $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, *dessiner* M *sur* $\mathcal{C}_{(O,1)}$ *si* $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\vec{OI}, \vec{OM}))$ *dans les cas suivants.*

$\cos x = \frac{2}{5}$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x = -0{,}7$ $\quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = 0{,}6$ $\quad \sin x = -0{,}8$ $\quad \sin x = -\frac{1}{3}$ $\quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

15 *On pose* $\mathcal{S}_d(I) = J$ *et* $d \cap \mathcal{C}_{(O,1)} \cap [IOJ]^s = \{M\}$ *et* $p_\perp(M) = M' \in (OI)$. *Démontrer que* $\Delta OMM'$ *est isocèle. Calculer* $\delta(O,M')$, *en déduire* $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Calculer* $\cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi)$, $\cos\frac{9\pi}{4}$, $\sin(\frac{\pi}{4} - 2\pi)$, $\sin(-\frac{15\pi}{4})$, $\cos(-\frac{7\pi}{4})$.

16 *Avec un repère orthonormé directe* $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, *on a* $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$, $M' = p_\perp(M) \in (OI)$ *et* $m_{rad}(\measuredangle(\vec{OI}, \vec{OM})) = \dot{\frac{\pi}{3}}$. *Montrer que* ΔIOM *est équilatéral et que* $\mathcal{S}_{(MM')}(O) = I$. *En déduire* $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ *et* $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17 *Démontrer que* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ *et* $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18 $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \in \dot{\frac{\pi}{2}} \cup \dot{\frac{3\pi}{2}}$.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ et } k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \in \dot{\pi} \cup \dot{0}$.

Autres propriétés

(Illustrer chacune des propriétés suivantes en distinguant plusieurs cas de figure)

7 Cosinus est une fonction paire et sinus une fonction impaire.

$\mathbf{\cos(-x) = \cos x}$ et $\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}$

Avec $m_{rad}(\measuredangle(\vec{OI}, \vec{OM})) = \dot{x}$ et $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$, on pose $p_\perp(M) = M' \in (OI)$, $p_\perp(M) = M'' \in (OJ)$, $M_1 = \mathcal{S}_{(OI)}(M)$ et $p_\perp(M_1) = M_2 \in (OJ)$.

On a $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})) = -m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})) = -\dot{x}$ car $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})$ et $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sont associés à des secteurs orientés isométriques ne sont pas de même direction si $M \neq I$.
Avec $p_{\perp}(M_1) = M' \in (OI)$, on obtient $\cos(-x) = \overline{OM'} = \cos x$
et $\sin(-x) = \overline{OM_2} = -\overline{OM''} = -\sin x$.

8 **$\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$**

Avec $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})) = \dot{x}$ et $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$, on pose $M_1 = \mathcal{S}_{(O)}(M)$, $p_{\perp}(M) = M' \in (OI)$, $p_{\perp}(M) = M'' \in (OJ)$, $p_{\perp}(M_1) = M_2 \in (OI)$, $p_{\perp}(M_1) = M_3 \in (OJ)$. Alors, $\mathcal{S}_{(O)}(M') = M_2$, $\mathcal{S}_{(O)}(M'') = M_3$ et $\overline{OM_2} = -\overline{OM'}$ et $\overline{OM_3} = -\overline{OM''}$.

Avec $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})) = (x \dot{+} \pi)$, on a $\cos(x + \pi) = \overline{OM_2} = -\overline{OM'} = -\cos x$
et $\sin(x + \pi) = \overline{OM_3} = -\overline{OM''} = -\sin x$.

9 **$\cos(x - \pi) = -\cos x$ et $\sin(x - \pi) = -\sin x$**

Avec $\cos(x - \pi) = \text{cox}(x - \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$
et $\sin(x - \pi) = \sin(x - \pi + 2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$

Avec $\cos(-y) = \cos y$ et $\sin(-y) = -\sin y$ on déduit

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

10 **$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ (un théorème d'échange)**

Ce théorème est immédiat pour $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.

Dans les autres cas, avec $\dot{x} = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}))$, on utilise $\mathcal{S}_d(I) = J$ et $\mathcal{S}_d(M) = M_1$. Alors, $\mathcal{S}_d(([O,I)) = [O,J)$ et $\mathcal{S}_d([IOM]) = [JOM_1]$ et $([JOM_1], [O,J))$ n'est pas de même orientation que $([IOM], [O,I))$ car on a un nombre impair de symétries orthogonales qui transforment un secteur en l'autre et $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM_1})) = -\dot{x}$.

On a ainsi $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})) = m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})) + m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM_1}))$

$$= \dot{\frac{\pi}{2}} - \dot{x} = (\frac{\pi}{2} - x)^{\cdot}$$

Si l'on pose $p_{\perp}(M) = M' \in (OI)$ et $p_{\perp}(M_1) = M'' \in (OJ)$,
alors $\mathcal{S}_d(M'') = \mathcal{S}_d(p_{\perp}(M_1) \in (OJ)) = p_{\perp}(M) \in (OI) = M'$ et $\overline{OM''} = \overline{OM'}$.

Ainsi, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \overline{OM''} = \overline{OM'} = \cos x$. En posant $y = \frac{\pi}{2} - x$, on peut écrire

$\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)) = \sin x$.

Exercices

19 *Etablir* $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

20 *Calculer* $\cos(-\frac{\pi}{3})$ $\quad \sin\frac{3\pi}{2}$ $\quad \cos\frac{5\pi}{2}$ $\quad \sin\frac{5\pi}{4}$ $\quad \cos\frac{7\pi}{6}$

$\sin(36\pi + \frac{\pi}{3})$ $\quad \cos(-12\pi + \frac{\pi}{6})$ $\quad \sin(3\pi + \frac{\pi}{3})$ $\quad \cos(5\pi - \frac{\pi}{3})$ $\quad \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{5\pi}{2})$ $\quad \sin\frac{145\pi}{6}$ $\quad \sin\frac{218\pi}{3}$ $\quad \cos(-\frac{15\pi}{4})$ $\quad \sin\frac{73\pi}{6}$

21 *Résoudre à l'aide de valeurs approchées dans* $\mathbb{R}$.

1) $3\cos(x) - 2 = 0$ $\quad$ 2) $2\sin(x) + \frac{1}{2} = 0$ $\quad$ 3) $5\cos(t) - 1 = 0$

4) $2\cos(x + \pi) + 1 = 0$ $\quad$ 5) $-2\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1 = 0$ $\quad$ 6) $3\sin(\pi + x) - 2 = 0$

22 *Avec* $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + k\cdot 2\pi$ *et* $\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - y + k\cdot 2\pi \end{cases}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$,

résoudre les équations suivantes.

1) $\cos x = \cos(2x + 1)$ $\quad$ 2) $\sin 3x = \sin(2x + 1)$ $\quad$ 3) $\sin 2x = \sin(2x + 3)$

4) $\sin(-\frac{x}{2}) = -\sin 3x$ $\quad$ 5) $\cos 5x = -\cos x$ $\quad$ 6) $\cos(x - 5) = \cos(2x - 3)$

7) $\cos(x + 1) = \cos(x + 2)$ $\quad$ 8) $\cos 3x = 1$ $\quad$ 9) $\sin(-2x) = 0$

23 *Exprimer en fonction de* $\cos x$ *ou de* $\sin x$.

$\sin(x - 3\pi)$ $\quad \cos(5\pi + x)$ $\quad \cos(4\pi - x)$ $\quad \cos(\frac{5\pi}{2} - x)$ $\quad \sin(\frac{7\pi}{2} - x)$ $\quad \cos(\frac{7\pi}{2} - x)$

24 *Résoudre selon le modèle suivant.*

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = x + k\cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - x + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = -\pi + k\cdot 4\pi \\ \text{ou} \\ 0x = \pi + k\cdot 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ x \in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

1) $\cos 2x = \sin 2x$ $\quad$ 2) $\sin\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{x}$ $\quad$ 3) $\cos\frac{x}{3} = \sin\frac{x}{3}$

4) $\sin(2 + \frac{1}{x}) = \cos(2 + \frac{1}{x})$ $\quad$ 5) $\cos(2x + 1) = \sin(2x + 1)$ $\quad$ 6) $\sin x^2 = \cos x^2$

25 *Représenter graphiquement* f *et* g *pour* $x \in [0; 2\pi]$ *avec* $f(x) = \sin x$ *et* $g(x) = \cos x$. *De même pour* $x \in [0; 4\pi]$ *avec* $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ *et* $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ *; pour* $x \in [0; \pi]$ *avec* $f(x) = \sin 2x$ *et* $g(x) = \cos 2x$.

3 La fonction tangente

Définition Avec $\cos x = 0 \Leftrightarrow \{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{\pi}{2} + k\pi\} = E$ et $x \in E$, si l'on pose $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

alors on a une application appelée **tangente** $\tan : \mathbb{R} - E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$

Exercices

26 *Trouver les domaines de définition de* f, g *et* h *si* $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$, $g(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + x)$, $h(x) = \tan 2x$.

Calculer $\tan x$ *pour* $x \in \{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; \pi; 2\pi; \frac{-443\pi}{4}\}$.

Représenter graphiquement tan *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ *à l'aide des valeurs calculées.*

27 *Démontrer les propriétés suivantes pour la fonction tangente.*

a) *tangente est une fonction impaire* $\tan(-x) = -\tan x$

b) $\tan(x + 2\pi) = \tan x$

c) $\tan(x + \pi) = \tan x$ (***tangente est périodique de période*** π)

d) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan x}$

e) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\dfrac{1}{\tan x}$

28 *On pose* $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ (***fonction cotangente***). *Donner le domaine de définition de la fonction cotangente et la représenter graphiquement pour* $x \in]0; 2\pi[- \{\pi\}$. *Cotangente est-elle une*

fonction périodique, paire, impaire? A-t-on $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$? *Trouver* Df *et* Dg si $f(x) = \cot 2x$ et $g(x) = \cot(\frac{\pi}{2} + x)$.

29 a) *Sans calculer* x, *trouver* $\sin x$ *et* $\cos x$ *si* $\tan x = \frac{3}{2}$ *et* $2\sin x + 3\cos x = 2$.

b) *Sans calculer* x, *trouver* $\sin x$ *et* $\cos x$ *si* $\tan x = \frac{3}{4}$.

30 *Démontrer que l'on a*

a) $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ *et* $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$

b) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

c) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Pour illustrer les fonctions tangentes et cotangentes à l'aide du cercle trigonométrique, si $x \notin \dot{0} \cup \dot{\frac{\pi}{2}} \cup \dot{\frac{3\pi}{2}} \cup \dot{\pi}$ on trouve des triangles rectangles associés au cercle trigonométrique.

Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan, on pose $d_1 \perp (OI)$ et $I \in d_1$, $d_2 \perp (OJ)$ et $J \in d_2$, et pour $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$ avec $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})) = \dot{x}$ et $x \notin \dot{0} \cup \dot{\frac{\pi}{2}} \cup \dot{\frac{3\pi}{2}} \cup \dot{\pi}$ on a $p_{\perp}(M) = M' \in (OI)$, $p_{\perp}(M) = M'' \in (OJ)$, $d_1 \cap (OM) = \{C\}$ et $d_2 \cap (OM) = \{D\}$.

Alors $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{M'M}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{IC}}{1} = \overline{IC}$

et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\overline{M''M}}{\overline{OM''}} = \frac{\overline{JD}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{JD}}{1} = \overline{JD}$

d_1 s'appelle l'axe des tangentes et d_2 celui des cotangentes.

Exercices

31 *Dessiner* $\tan x$ *et* $\cot x$ *sur les axes des tangentes et des cotangentes si* $x \in \{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{51\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}\}$.

32 *Dessiner* M *et évaluer les mesures de l'angle* $\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ *en degré et en radian dans chacun des cas suivants.*

$\tan x = 1$	$\tan x = -1$	$\tan x = \sqrt{3}$	$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x = -\sqrt{3}$	$\cot x = -1$	$\cot x = -\sqrt{3}$	$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

33 *Avec* $\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ *et* $\cot x = \cot y \Leftrightarrow x = y + k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$, *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *en radians.*

1) $\tan x = 1$	2) $\cot x = 1$	3) $\tan 3x = 1$
4) $\cot 4x = 1$	5) $\tan(2x + \frac{\pi}{2}) = \tan x$	6) $\cot(2\pi + 3x) = \cot 2x$
7) $\tan x = \cot(2x - 1)$	8) $\cot(\frac{x}{2} + \pi) = \tan 2x$	9) $\cot \frac{x^2}{9} = 0$

4 Formules d'addition

Avec un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et $M \in \mathcal{C}_{(O,1)}$, on pose $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})) = \dot{x}$ et $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})) = \dot{y}$ et on choisit $C \in \mathcal{C}_{(O,1)}$ avec $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC})$ repère orthonormé direct.

Pour les coordonnées de M , N et C dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on obtient $M(\cos x ; \sin x)$, $N(\cos(x+y) ; \sin(x+y))$ et $C(\cos(x + \frac{\pi}{2}) ; \sin(x + \frac{\pi}{2}))$. Dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on a

$$\overrightarrow{ON} = \cos(x+y) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin(x+y) \cdot \overrightarrow{OJ}.$$

Dans la base $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC})$, on a

$$\overrightarrow{ON} = \cos y \cdot \overrightarrow{OM} + \sin y \cdot \overrightarrow{OC}.$$

$$= \cos y \cdot (\cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}) + \sin y \cdot (\cos(x + \tfrac{\pi}{2}) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \cdot \overrightarrow{OJ})$$

$$= (\cos y \cdot \cos x + \sin y \cdot (-\sin x)) \cdot \overrightarrow{OI} + (\cos y \cdot \sin x + \sin y \cdot \cos x) \cdot \overrightarrow{OJ}$$

Le vecteur $\overrightarrow{ON}$ s'écrivant de manière unique dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a

$$\mathbf{\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}$$
$$\mathbf{\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}$$

Exercice 34

Démontrer les relations suivantes.

a) $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$ et $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ et $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

b) Formules de duplication

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

c) Transformation d'une somme en produit

$$\left.\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

$$\Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Sur le modèle précédent

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ et $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ et $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

d) Formules de bissection

$\cos^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{1+\cos x}{2}$ et $\sin^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{1-\cos x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(Indication : remplacer 2x *par* x *dans la formule de duplication pour le cosinus)*

e) Expression rationnelle de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ *en fonction de* $\tan\frac{x}{2}$

$\cos x = \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$ et $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$ et $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$

(Indication : remplacer 2x *par* x *dans les formules de duplication)*

5 Trigonométrie et triangle

1 Triangle rectangle

Avec $(AB) \perp (BC)$, on choisit $I \in (AB)$ et $\delta(A,I) = 1$ et $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ repère orthonormé direct.

On pose $M \in \mathcal{C}_{(A,1)} \cap [A,C)$, $p_\perp(M) = M' \in (AB)$ et $m_{rad}(\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = \dot{x}$.

Les triangles $\Delta AM'M$ et ΔABC sont deux triangles rectangles semblables et l'on a

$$\frac{\delta(A,B)}{\delta(A,C)} = \frac{\delta(A,M')}{\delta(A,M)} = \overline{AM'} = \cos x \qquad \left(= \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}\right)$$

$$\frac{\delta(B,C)}{\delta(A,C)} = \frac{\delta(M,M')}{\delta(A,M)} = \overline{MM'} = \sin x \qquad \left(= \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}\right)$$

$$\frac{\delta(B,C)}{\delta(A,B)} = \frac{\delta(M,M')}{\delta(A,M')} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \qquad \left(= \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}\right)$$

Exercices

35 *Calculer la mesure des angles d'un triangle rectangle si* $(AB) \perp (BC)$, $\delta(A,B) = 15$ *et* $\delta(B,C) = 20$.

36 *Quelle est la hauteur d'une tour que l'on voit sous un angle de* 25° *lorsqu'on est à* 80 m *de son pied?*

37 *Quelle est la hauteur d'un mur si l'échelle de 8 m qui atteint son sommet est inclinée de* 60° *par rapport à l'horizontale?*

38 *On donne* $\delta(A,B) = 6$, $\delta(B,C) = 5$ et $\delta(C,A) = 8$. *Avec* $p_\perp(B) = H \in (AC)$, $h = \delta(B,H)$ *et* $x = \delta(C,H)$, *montrer que l'on a* $6^2 = h^2 + (8-x)^2$ *et* $5^2 = h^2 + x^2$. *Calculer* x *et* h *et la mesure des angles du triangle* ΔABC.

39 *Dans un parallélogramme* ABCD *on donne* $\delta(A,B) = 8$, $\delta(A,D) = 10$ *et* $\mu_{deg}(\measuredangle BAD) = 20°$. *Calculer l'aire du parallélogramme.*

40 *Calculer la mesure des angles d'un triangle isocèle dont un des côtés a une longueur deux fois plus grande que celle de la base. Que devient la mesure des angles si un côté est* n *fois plus long que la base* $(n \in \mathbb{N})$?

41 *Comment choisir la longueur d'un rectangle dont la largeur est* 5 , *sachant que les diagonales se coupent sous un angle mesurant* 45° ?

5.2 Triangle quelconque

Théorème du cosinus

Si $A \notin (BC)$, $p_{\perp}(B) = H \in]A,C[$ et $\mu(\measuredangle BAC) = \alpha$, avec $\delta(A,H) = m$, $\delta(C,H) = n$, $\delta(B,H) = h$, $\delta(A,B) = c$, $\delta(A,C) = b$ et $\delta(B,C) = a$,

alors $\cos\alpha = \dfrac{m}{c}$ et $m = c \cdot \cos\alpha$.

Avec Pythagore $\quad h^2 = c^2 - m^2 = a^2 - n^2$

$$\Rightarrow \quad c^2 - c^2\cos^2\alpha = a^2 - (b-m)^2$$
$$= a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2$$
$$= a^2 - b^2 + 2bc\cdot\cos\alpha - c^2\cos^2\alpha$$

Alors $\boxed{\mathbf{c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = a^2}}$ (Pythagore généralisé)

ou $$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

Exercices

42 Si $A \notin (BC)$, $p_{\perp}(B) = H \in (AC) - [C,A)$, *démontrer que l'on a aussi* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$.

43 *Si* $A \notin (BC)$, $p_{\perp}(B) = H \in (AC) - [A,C)$, *démontrer que l'on a aussi* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$.

44 *Calculer la longueur des hauteurs et des médianes d'un triangle dont les côtés* a, b, c *sont donnés. Quelle est la mesure des angles du triangle?*

a) $a = 8 \qquad b = 12 \qquad c = 5$

b) $a = 2\sqrt{3} \qquad b = 2\sqrt{2} \qquad c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

45 *Avec* $A \notin (BC)$, $\delta(B,C) = 3$, $\delta(A,C) = 4$ *et* $\mu_{deg}(\measuredangle CAB) = 18°$, *calculer la longueur du troisième côté et la mesure des deux autres angles.*

Théorème du sinus

Si $A \notin (BC)$, $\delta(A,B) = c$, $\delta(A,C) = b$ et $\delta(B,C) = a$, $p_{\perp}(A) = A_1 \in [B,C]$, $p_{\perp}(B) = B_1 \in [A,C]$, $p_{\perp}(C) = C_1 \in [A,B]$, $\alpha = \mu(\measuredangle CAB)$, $\beta = \mu(\measuredangle ABC)$ et $\gamma = \mu(\measuredangle BCA)$, alors

$$\sin\alpha = \frac{\delta(B,B_1)}{c}, \quad \sin\beta = \frac{\delta(C,C_1)}{a}, \quad \sin\gamma = \frac{\delta(A,A_1)}{b} .$$

Pour l'aire σ du triangle ΔABC, on a

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\delta(B,B_1)\cdot b \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{1}{2}\,\delta(A,A_1)\cdot a \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{1}{2}\,\delta(C,C_1)\cdot c$$

et $$\sigma = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot \sin\beta$$

alors $\quad b\cdot c\cdot\sin\alpha = a\cdot b\cdot\sin\gamma \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

et $\quad a\cdot b\cdot\sin\gamma = c\cdot a\cdot\sin\beta \Leftrightarrow \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

et $$\boxed{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin\alpha}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin\beta}} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin\gamma}}}$$

Exercices

46 *Que deviennent ces formules si l'on pose*
$p_\perp(A) = A_1 \in (BC) - [B,C]$ *ou* $p_\perp(A) = A_1 \in (BC) - [C,B]$?

47 *Dans un triangle,*

a) Si $a = 2$, $\gamma = 70°$ *et* $\beta = 30°$, *calculer* b *et* c.

b) Si $b = 2$, $a = 3$ *et* $\gamma = 27°$, *calculer* c *et* β.

c) Si $a = 2$, $\alpha = 22°$ *et* $\beta = 50°$, *calculer* b *et* c.

48 *On donne un parallélogramme* ABCD *avec* $\delta(A,B) = 5$, $\delta(B,C) = 3$ *et* $\mu(\measuredangle BAD) = 70°$. *Calculer la longueur des diagonales et l'aire du parallélogramme.*

49 *Si* $(AB) \perp (BC)$ et $\mu(\measuredangle BAC) = \alpha$, *démontrer que l'on a* $\delta(A,B) = \delta(A,C)\cos\alpha$.

50 *Une façade est surmontée d'un toit dont les chevrons mesurent* 8 m. *La pente du toit étant de* 22°, *quelle est la largeur de cette façade?*

Théorème des projections

Si $A \notin (BC)$, $p_\perp(A) = H \in [B,C]$, $\mu(\measuredangle CBA) = \beta$ et $\mu(\measuredangle BCA) = \gamma$, alors

$$\boxed{\boldsymbol{\delta(B,C) = \delta(B,A)\cos\beta + \delta(A,C)\cos\gamma}}$$

Exercices

51 *Que devient cette égalité si* $p_\perp(A) = H \in (BC) - [B,C]$ *ou* $p_\perp(A) = H \in (BC) - [C,B]$?

52 *Pour le calcul du rayon d'un cercle circonscrit à un triangle, si* $\{A,B,C\} \subset \mathcal{C}_{(O,r)}$ *et* $\mathcal{S}_d(A) = B$ *avec* $d \cap (AB) = \{M\}$, *on rappelle que* $\mu(\measuredangle AOB) = 2\,\mu(\measuredangle ACB)$.

a) Démontrer que l'on a $\mu(\measuredangle AOB) = 2\,\mu(\measuredangle AOM)$

b) Avec $\delta(A,B) = c$, $\delta(O,A) = r$ et $\mu(\measuredangle ACB) = \gamma$, *démontrer que* $r = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$.

On tirera aussi profit des nombreux exercices relatifs aux triangles ou à la résolution d'équations trigonométriques dans le FUNDAMENTUM de mathématique "Notions élémentaires" de la CRM.